

## シュミットの正規直交化法

## 正規直交基底

ある空間を作り出す元となるベクトルをその空間の基底という。

とくに基底が互いに直交し合う単位ベクトルの場合、それを正規直交基底という。

つまり、

基底  $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$  が正規直交基底ならば、
$$\begin{cases} \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1 & (i = j) \\ \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$
 が成り立つ。

正規直交基底のとり方はいくらでもあり、

たとえば、

xyz 直交座標系の各軸上の単位ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  は正規直交基底の 1 つである。

## シュミットの正規直交化法

正規直交基底でない基底（たとえば斜交座標系）を正規直交基底に変換する方法にシュミットの正規直交化法というものがある。

では、この方法を用いて、正規直交基底でない基底、

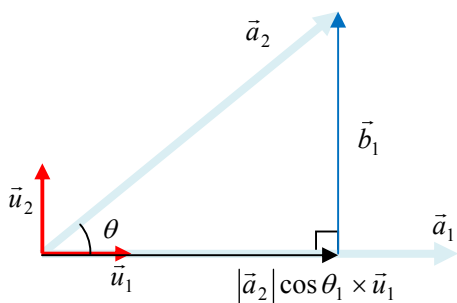
すなわち「大きさが 1 でない」または「互いに直交しない」基底  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n\}$  を正規直交基底  $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$  に変換してみよう。

手順 1:  $\vec{a}_1$  を  $\vec{u}_1$  に変換する。

$\vec{u}_1 = \frac{1}{|\vec{a}_1|} \vec{a}_1$  とするだけでよい。



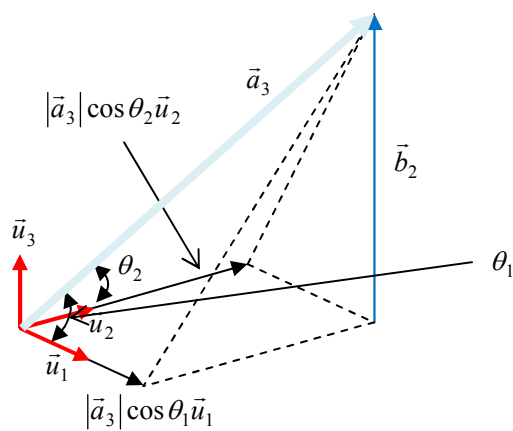
手順 2:  $\vec{a}_2$  を  $\vec{u}_2$  に変換する。



$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= -|\vec{a}_2| \cos \theta \cdot \vec{u}_1 + \vec{a}_2 \\ &= -\frac{|\vec{a}_2| \cos \theta}{|\vec{a}_1|} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ &= -\frac{|\vec{a}_2| |\vec{a}_1| \cos \theta}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ &= -\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \\ \therefore \vec{b}_1 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 \end{aligned}$$

よって、これを  $\vec{u}_2 = \frac{1}{|\vec{b}_1|} \vec{b}_1$  に代入すればよい。

手順 3 :  $\vec{a}_3$  を  $\vec{u}_3$  に変換



$$\vec{b}_2 = \vec{a}_3 - |\vec{a}_3| \cos \theta_2 \cdot \vec{u}_2 - |\vec{a}_3| \cos \theta_1 \cdot \vec{u}_1$$

よって, これを  $\vec{u}_3 = \frac{1}{|\vec{b}_2|} \vec{b}_2$  に代入すればよい。  
 $\vdots$

$$\vec{b}_{n-1} = \vec{a}_n - |\vec{a}_n| \cos \theta_1 \vec{u}_1 - |\vec{a}_n| \cos \theta_2 \vec{u}_2 - \cdots - |\vec{a}_n| \cos \theta_{n-1} \vec{u}_{n-1}$$

$$\vec{u}_n = \frac{1}{|\vec{b}_{n-1}|} \vec{b}_{n-1}$$